

Calcul intégral

n°: 11 [20%]

2^{ème} Bac.Pro

2^{ème} Semestre

2011-2012

① Définition et notation:

Soit f une fct continue sur un intervalle $[a, b]$. F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Déf: On appelle intégrale de f de a à b ; le nbre réel:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

on la note par: $\int_a^b f(x) dx$

(ou encore: $\int_a^b f(t) dt$).

Exemples: 1°/ $\int_2^3 2x dx = ?$

$$f(x) = 2x \text{ donc: } F(x) = x^2$$

$$\int_2^3 2x dx = [F(x)]_2^3 = [x^2]_2^3 = 5$$

2°/ $\int_0^{\pi/3} \cos(x) dx = ?$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$$

$$\text{donc: } \int_0^{\pi/3} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/3}$$

$$= \sin(\pi/3) - \sin(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3°/ $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = ?$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = -\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\text{donc: } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{-2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4°/ \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = ?$$

$$\text{on remarque: } \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow F(x) = \ln(x^2+1)$$

$$\text{donc: } \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln(2)$$

Résultats: **R₁**: si f est dérivable

$$\text{alors: } \int_a^b f'(t) dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\text{expl: } \int_0^1 (3x^2 + 4x - 1) dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - x)' dx$$

$$= [x^3 + 2x^2 - x]_0^1$$

$$= (1 + 2 - 1) - 0 = 2$$

$$\text{R}_2: \int_a^b dx = [x]_a^b$$

$$\int_a^b kx dx = \left[k \frac{x^2}{2}\right]_a^b; (k \in \mathbb{R})$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \text{ (lorsque } a=b)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

② Linéarité et relation de Chasles.

♦ Linéarité de l'intégrale: $\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

♦ Relation de Chasles: pour tout $a \leq c \leq b$,

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

EX: 1 | Vérifier les calculs suivants:

1°/ $\int_{-1}^0 (2x+1) dx = \boxed{0}$

2°/ $\int_0^1 (x^3+6x+1) dx = \boxed{\frac{13}{4}}$

3°/ $\int_4^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \boxed{2}$

4°/ $\int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \left[\ln\left(\frac{5}{2}\right) \right]$

EX: 2 | Montrer que:

1°/ $\int_0^\pi (4x + \frac{2}{3} \sin(x)) dx = \boxed{2\pi^2 + \frac{4}{3}}$

2°/ $\int_0^1 (5x^3 + e^x) dx = \boxed{e + \frac{1}{4}}$

3°/ $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \boxed{\frac{1}{e}}$

4°/ $\int_1^2 (2x+3)(x^2+3x)^2 dx = \boxed{312}$

③ Exemples types:

$$\int_a^b x^r dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]; r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

$$\int_a^b \sqrt[n]{x^m} = \int_a^b x^{\frac{m}{n}} dx = \left[\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} \right]_a^b$$

$$\int_a^b e^x dx = [e^x]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [-\ln(|x|)]_a^b$$

$$\int_a^b \cos(x) dx = [\sin(x)]_a^b$$

$$\int_a^b \sin(x) dx = [-\cos(x)]_a^b$$

②

$$\int_a^b u^n(x) u'(x) dx = \left[\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} \right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u^n(x)} dx = \frac{1}{n \neq 1} \left[\frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}(x)} \right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln(|u(x)|)]_a^b$$

$$\int_a^b u'(x) e^{u(x)} dx = [e^{u(x)}]_a^b$$

Exemples: 1°/ $I = \int_0^{\pi/4} \cos(x) \sin^3(x) dx$

posons: $u(x) = \sin(x)$, donc:

$$I = \int_0^{\pi/4} u'(x) u^3(x) dx = \left[\frac{u^{3+1}(x)}{3+1} \right]_0^{\pi/4} = \left[\frac{1}{4} \sin^4(x) \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{2^4} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

2°/ $J = \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^3} dx = ?$

on pose: $u(x) = (x^4+1) \Rightarrow u'(x) = 4x^3$

donc: $J = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u^3(x)} dx = \left[\frac{-1}{3-1} \times \frac{1}{u^{3-1}(x)} \right]_0^1$

$$= \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^4+1)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

EX: 3 | Montrer que:

1°/ $\int_0^3 2x e^x dx = \boxed{e^3 - 1}$

2°/ $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \right]$

3°/ $\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \boxed{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

④ Intégration par partie :

Règle: $\int_a^b u'(x)v(x) dx$

$$= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Exps: 1°/ $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx = ?$

on a: $x \cos(x) = u'(x) \times v(x)$

avec: $\begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

et on obtien:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx &= [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x) dx \\ &= [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ &= [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times 1 - 0 - [-0 - (-1)] \\ &= \frac{\pi}{2} - [+1] = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1} \end{aligned}$$

2°/ $\int_1^e \ln(x) dx = ?$

on écrit: $\ln(x) = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$

on pose: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc

on obtien: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et

on applique une intégration par partie:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x) dx &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) dx \\ u \times v &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx \\ &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e \ln(e) - 1 \times 0 - [x]_1^e \\ &= e \times 1 - 0 - (e - 1) \\ &= e - e + 1 = \boxed{1} \end{aligned}$$

EX:41 A l'aide d'une intégration par partie montrer que:

1°/ $\int_{-1}^2 x e^x dx = 0$

2°/ $\int_0^{\pi} x \sin(x) dx = \pi$

3°/ $\int_2^e 4x^3 \ln(x) dx = \frac{3}{4}e^4 - 16 \ln(2) + 4$

⑤ Valeur moyenne d'une fonction:

soit f une fct continue sur $[a; b]$ avec: $a < b$.

Déf Le nombre: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$.

⑥ La positivité de l'intégrale et ses conséquences.

a) Positivité de l'intégrale

si $f \geq 0$ et si $a \leq b$ alors:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

b) Inégalité:

si $f \leq g$ et si $a \leq b$ alors:

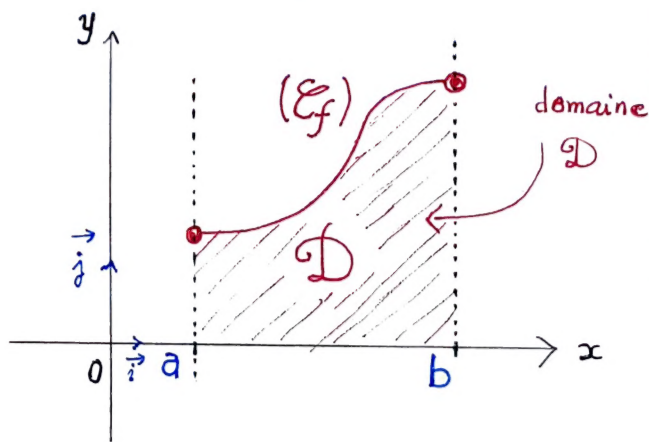
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

⑦ calcul de surfaces et de volumes:

7-a) Aire d'un domaine du plan limité par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées:

f étant une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Soit \mathcal{D} la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x=a$ et $x=b$:



→ L'aire, en unités d'aire, de ce domaine \mathcal{D} est:

$$A = \int_a^b f(x) dx \text{ (U.A.)}$$

avec: U.A représente l'unité d'aire.

$$1 \text{ unité d'aire} = (1 \text{ unité de } x) \times (1 \text{ unité de } y) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

Exemple: Calculer l'aire, en cm^2 , du domaine \mathcal{D} ; sachant que:

$$f(x) = x^2 + 2x; a = 1; b = 2$$

$$\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm et } \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$$

Prépare: on a: $x^2 + 2x \geq 0$ sur $[1; 2]$

donc:

→ on applique: $A = \int_a^b f(x) dx \text{ (U.A.)}$

$$\text{on a: } \int_a^b f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{3} + 1 \right)$$

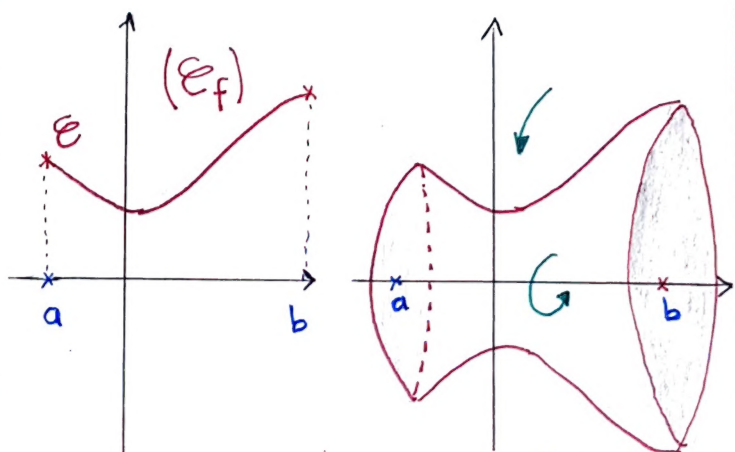
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} + 3 = \frac{16}{3}$$

→ (U.A) = $2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$

donc: $A = \frac{16}{3} \times 2 \text{ cm}^2 = \frac{32}{3} \text{ cm}^2$

(4)

7-b) Volume d'un solide de révolution engendré par la rotation de la courbe d'une fonction autour de l'axe des abscisses.



\mathcal{C} = arc de courbe on fait tourner

on obtient un solide de révolution $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ autour de} \\ \text{l'axe } (Ox). \end{array} \right.$

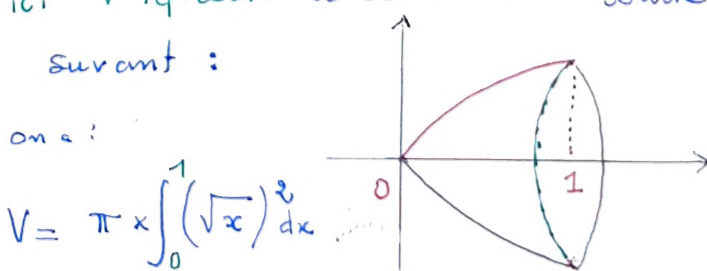
Le volume du solide est:

$$V = \pi \times \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ (U.V.)}$$

avec: (U.V) représente l'unité de volume.

Exemple: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$
 $[a; b] = [0; 1]$

ici V représente le volume d solide suivant:



on a:

$$V = \pi \times \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi \times \int_0^1 x dx = \pi \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi \times \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \text{ (U.V.)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2} \text{ (U.V.)}$$

وبالله التوفيق!



n° 11 - 2ème sem